INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

MATHEMATIQUES
Option technologique

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

DUREE : 2 heures - COEFFICIENT 4

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants.

PARTIE I : ALGEBRE LINEAIRE

On considère la matrice réelle d'ordre 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer M^2 , M^3.

2 - Montrer qu'il existe a et b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.

3 - Montrer que 0 est valeur propre de M et donner les vecteurs propres associés.

4 - Montrer à l'aide de la question 2 -, que les valeurs propres éventuelles non nulles de la matrice M sont : 2 et 5.

Montrer alors, par le calcul des vecteurs propres associés, que 2 et 5 sont effectivement valeurs propres.

PARTIE II : ANALYSE

Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + x - 1} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = \frac{1}{2}$$

1 - Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2 - Montrer que g est dérivable en 0.

3 - Calculer, pour $x \neq 0$, la dérivée $g'(x)$ et montrer que $g'(x) > 0$.

4 - Représenter graphiquement la fonction g.

5 - Soit $A(\lambda)$ l'aire de l'ensemble des points M(x,y) tels que :

$$1 \leq x \leq \lambda \text{ et } g(x) \leq y \leq 1$$

a) Prouver, pour $x \geq 1$, $\quad 1 - g(x) \leq xe^{-x}$.

b) En déduire que $A(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III : PROBABILITES.

EXERCICE 1

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boules portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
.....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard sans remise un échantillon de 5 boules.
Quelle est la probabilité d'obtenir :

1 - Trois boules portant le même numéro et deux boules portant le même numéro différent du précédent ?

2 - Deux boules portant le même numéro, deux boules portant le même numéro différent du précédent, et une boule portant encore un autre numéro ?

Après avoir donné les justifications nécessaires, l'on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de ces probabilités.

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur R par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geq 0$, par :

$$f(t) = 3\, e^{-3t} .$$

1 - Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2 - Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.

FIN